3. Kurztest

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Diese Größen werden Sie im Folgenden brauchen:

Zeichen	Dimension	Einheit
$\hbar$	ML^2T^{-1}	$Js = \frac{kg\,m^2}{s}$
c	LT^{-1}	$\frac{m}{s}$
e	TI	$C = As$
t	T	Jahre
K	Geld	Euro
Y	Geld $\cdot T^{-1}$	$\frac{\text{Euro}}{\text{Jahr}}$

Geben Sie unbedingt auch jeweils eine Rechnung und/oder kurze Begründung für Ihre Antwort an!

1. Betrachten Sie die drei Größen $\hbar$, c und e (siehe Tabelle) sowie die elektrische Feldkonstante ϵ_0 mit Dimension $M^{-1}L^{-3}T^4I^2$ und kombinieren Sie diese zu einer dimensionslosen neuen Größe! Das heißt, finden Sie eine Größe der Form $\frac{1}{\epsilon_0}\hbar^n c^m e^k$ mit ganzen Zahlen n, m, k (positiv oder negativ), so dass das Ergebnis dimensionslos ist.
   Tipp: Finden Sie zunächst n und k, so dass sich die Dimensionen M und I wegkürzen. Danach bestimmen Sie m, so dass auch der Rest wegfällt. Diese neue Größe ist proportional zur "Feinstrukturkonstante", die in der theoretischen Physik von besonderer Bedeutung ist. **2 Punkte**
2. Wir betrachten ein volkswirtschaftliches Wachstumsmodell. Y ist das Bruttosozialprodukt, t die Zeit, K der Kapitalstock, δ die Abschreibungsrate und s die Investitionsrate. (Siehe Tabelle für die Dimensionen einiger dieser Größen.) Wir nehmen an, dass für die Produktion gilt

   $$Y = r\cosh(\lambda K),$$

   wobei r und λ Modellparameter sind (cosh ist eine mathematische Funktion wie zum Beispiel auch die Exponentialfunktion oder der Sinus). Dann kann man das Wachstum des Kapitalstocks durch die folgende Differentialgleichung beschreiben:

   $$\frac{d}{dt}K(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

   Bestimmen Sie die Dimensionen sowie Einheiten der Größen r, λ, s und δ, so dass beide Gleichungen dimensionsmäßig sinnvoll sind! Tipp: $\left[\frac{d}{dt}K(t)\right] = \left[\frac{K(t)}{t}\right]$. **3 Punkte**

Lösung:

1. Die Größe I (Stromstärke) kommt nur in ϵ_0 und e vor — deshalb muss $k = 2$ sein, damit sie sich wegkürzen kann. Analog dazu kommt M neben ϵ_0 nur in $\hbar$ vor, und fällt nur bei $n = -1$ weg. Wir haben also bis jetzt:

   $$\left[\frac{e^2}{\epsilon_0\hbar}c^m\right] = \frac{T^2I^2}{M^{-1}L^{-3}T^4I^2 \cdot ML^2T^{-1}} \cdot [c]^m = LT^{-1} \cdot (LT^{-1})^m$$

   Folglich ist die gesamte Größe nur dann dimensionslos, wenn $m = -1$, nämlich $\frac{e^2}{\epsilon_0\hbar c}$.

2. Aus der ersten Gleichung sieht man, dass $[Y] = [r] = \text{Geld} \cdot T^{-1}$, da cosh eine dimensionslose Funktion ist. Weiters muss das Argument λK des cosh dimensionslos sein, also folgt $[\lambda] = [K]^{-1} = \text{Geld}^{-1}$.
   In der zweiten Gleichung steht auf der linken Seite die Dimension $\text{Geld} \cdot T^{-1}$, also muss diese auch rechts auftauchen — da wir dort eine Summe haben, muss sogar jeder der beiden Summanden diese Dimension haben. Da $[Y] = \text{Geld} \cdot T^{-1}$ bereits gilt, muss also $[s] = 1$ sein. Außerdem folgt $[\delta] = T^{-1}$.