Naturwissenschaftliches Rechnen, WS 2011/2

Endklausur (1. Februar 2012)

4 Versionen des Beispiels zum Thema “Dimensionen und Einheiten” mit Musterlösung.

Betrachten Sie die Planck'sche Strahlungsformel in Wellenlängendarstellung mit den beiden Strahlungskonstanten c_1 und c_2:

$$P = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

Dabei sind:

	Größe	Dimension	Einheit
P	Abstrahlungsleistung	$ML^{-1}T^{-3}$	$Wm^{-2}m^{-1} = \mathrm{kg}\, m^{-1}s^{-3}$
T	Temperatur des Strahlers	Temp	K
λ	Abgestrahlte Wellenlänge	L	m
c_1	1. Strahlungskonstante	?	?
c_2	2. Strahlungskonstante		

Bestimmen Sie die Einheit der Konstanten c_1!

Lösung:

Der Faktor mit der Exponentialfunktion ist dimensionslos, da es die Exponentialfunktion selbst sein muss. Also bleibt aus der Gleichung übrig:

$$[P] = \left[\frac{c_1}{\lambda^5}\right] \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad [c_1] = [P]\left[\lambda^5\right] = \mathrm{kg}\, m^{-1}s^{-3} \cdot m^5 = \mathrm{kg}\, m^4 s^{-3}$$

Betrachten Sie die Planck'sche Strahlungsformel in Wellenlängendarstellung mit den beiden Strahlungskonstanten c_1 und c_2:

$$P = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

Dabei sind:

	Größe	Dimension	Einheit
P	Abstrahlungsleistung	$ML^{-1}T^{-3}$	$Wm^{-2}m^{-1} = \mathrm{kg}\, m^{-1}s^{-3}$
T	Temperatur des Strahlers	θ	K
λ	Abgestrahlte Wellenlänge	L	m
c_1	1. Strahlungskonstante		
c_2	2. Strahlungskonstante	?	?

Bestimmen Sie die Einheit der Konstanten c_2!

Lösung:

Das Argument der Exponentialfunktion muss dimensionslos sein, daher muss gelten:

$$\left[\frac{c_2}{\lambda T}\right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [c_2] = [\lambda]\,[T] = mK$$

Der Rest der Formel (inklusive c_1) kann ignoriert werden, da schon allein mit diesem Argument die Einheit von c_2 eindeutig bestimmt ist.

Betrachten Sie die Planck'sche Strahlungsformel in Frequenzdarstellung:

$$P = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Dabei sind:

	Größe	Dimension	Einheit
P	Abstrahlungsleistung	MT^{-2}	$Wm^{-2}\,\mathrm{Hz}^{-1} = \mathrm{kg}\,s^{-2}$
T	Temperatur des Strahlers	θ	K
ν	Abgestrahlte Frequenz	T^{-1}	$\mathrm{Hz} = s^{-1}$
c	Lichtgeschwindigkeit	LT^{-1}	ms^{-1}
h	Planck-Konstante	ML^2T^{-1}	$Js = \mathrm{kg}\,m^2s^{-1}$
k	Boltzmann-Konstante	?	?
π	Kreiszahl	dimensionslos	

Bestimmen Sie die Einheit der Boltzmann-Konstanten k!

Lösung:

Das Argument der Exponentialfunktion muss dimensionslos sein, daher muss gelten:

$$\left[\frac{h\nu}{kT}\right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [k] = \frac{[h]\,[\nu]}{[T]} = \frac{\mathrm{kg}\,m^2s^{-1} \cdot s^{-1}}{K} = \mathrm{kg}\,m^2s^{-2}K^{-1} = \frac{J}{K}$$

Der Rest der Formel (der Vorfaktor) kann ignoriert werden, da schon allein mit diesem Argument die Einheit von k eindeutig bestimmt ist.

Betrachten Sie die Planck'sche Energiedichte in Frequenzdarstellung:

$$U = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Dabei sind:

	Größe	Dimension	Einheit
U	Energiedichte	?	?
T	Temperatur des Strahlers	θ	K
ν	Abgestrahlte Frequenz	T^{-1}	$\text{Hz} = s^{-1}$
c	Lichtgeschwindigkeit	LT^{-1}	ms^{-1}
h	Planck-Konstante	ML^2T^{-1}	$Js = \text{kg}\, m^2 s^{-1}$
k	Boltzmann-Konstante		
π	Kreiszahl	dimensionslos	

Bestimmen Sie die Einheit der Energiedichte U!

Lösung:

Der Faktor mit der Exponentialfunktion ist dimensionslos, da es die Exponentialfunktion selbst sein muss. Also bleibt aus der Gleichung übrig:

$$[U] = \left[\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\right] \cdot 1 = \frac{[h]\,[\nu]^3}{[c]^3} = \frac{\text{kg}\, m^2 s^{-1} \cdot s^{-3}}{m^3 s^{-3}} = \text{kg}\, m^{-1} s^{-1} = \frac{J}{m^3\,\text{Hz}}$$